

الفصل الثالث

١-٣ الأعداد المركبة
Complex Numbers

يسمى العددان المركبان $a - bi$, $a + bi$ مركبين مترافقين، وناتج ضربهما هو عدد $a^2 + b^2$. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركّبين.

مثال 7 قسمة الأعداد المركبة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

(a $\frac{2i}{3+6i}$

$\frac{2i}{3+6i} = \frac{2i}{3+6i} \cdot \frac{3-6i}{3-6i}$ $3 - 6i$ ، $3 + 6i$ مترافقان مركّبان

$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$ اضرب

$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$ $i^2 = -1$

$= \frac{6i + 12}{45}$ بسّط

$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i$ اكتب الناتج على الصورة $a + bi$

(b $\frac{4+i}{5i}$

$\frac{4+i}{5i} = \frac{4+i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$ اضرب في $\frac{i}{i}$

$= \frac{4i + i^2}{5i^2}$ اضرب

$= \frac{4i - 1}{-5}$ $i^2 = -1$

$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$ اكتب الناتج على الصورة $a + bi$

إرشادات للدراسة

قراءة الرياضيات

يمكنك حل الفرع b من المثال 7 بضرب كل من البسط والمقام في العدد $-5i$ ، ولكن للاختصار تم الضرب في العدد i فقط.



تحقق من فهمك :-

7) بسط كلاً مما يأتي:

(7A $\dfrac{-2i}{3+5i}$

$$\frac{-2i}{3+5i} = \frac{-2i}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i}$$

$$= \frac{-6i+10i^2}{9+25}$$

$$= \frac{-6i-10}{34}$$

$$= \frac{-10}{34} - \frac{6i}{34}$$

$$= -\frac{5}{17} - \frac{3i}{17}$$

(7B $\dfrac{2+i}{1-i}$

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{2+2i+i+i^2}{2}$$

$$= \frac{2+2i+i-1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$$

تـــأكـد :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{-81}$

$$\sqrt{-81} = \sqrt{81}\, i$$

$$= 9\, i$$

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$3 \cdot 3$

تــــأكــد :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

2 $\sqrt{-32}$

$$\sqrt{-32} = \sqrt{32}\, i$$

$$= 4i\sqrt{2}$$

32	2	
16	2	2
8	2	
4	2	2
2	2	
1		

تـــأكـد :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

3) $(4i)(-3i)$

$$(-12)\,i^2 = (-12)(-1)$$

$$= 12$$

تـــأكـد :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

4

$3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$

$3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$

$3\sqrt{24}\, i \cdot 2\sqrt{18}\, i$

$= 6i^2\sqrt{432}$

$= -6 \cdot 12\sqrt{3}$

$= -72\sqrt{3}$

2	2	432
	2	216
2	2	108
	2	54
3	3	27
	3	9
	3	3
		1

تـــأكـد :–

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

5 i^{40}

$$=(i^4)^{10} = (1)^{10}$$

$$= 1$$

6 i^{63}

$$=(i^4)^{15} \cdot (i^3) \quad = 1^{10} \cdot -i$$

$$= -i$$

تــــأكـد :-

مثال 3

حل كل معادلة مما يأتي:

7 $4x^2 + 32 = 0$

$$\frac{4x^2}{4} = \frac{-32}{4}$$

بالقسمة على 4

$$x^2 = -8 \qquad x = \pm\sqrt{-8}$$

$$x = \pm\sqrt{8}\, i$$

$$x = \pm 2i\sqrt{2}$$

تـــأكـد :-

مثال 3

حل كل معادلة مما يأتي:

8 $2x^2 + 24 = 0$

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{-24}{2}$$

بالقسمة على 2

$$x^2 = -12 \qquad x = \pm\sqrt{-12}$$

$$x = \pm i\sqrt{12}$$

$$x = \pm 2i\sqrt{3}$$

تـــأكـد :-

مثال 4

أوجد قيمة كل من a , b اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

9 $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$

$$\frac{3a}{3} = \frac{9}{3}$$

$$a = 3$$

$$4b+2 = -6$$

$$4b = -6-2$$

$$\frac{4b}{4} = \frac{-8}{4}$$

$$b = -2$$



تــــأكـد :-

مثال 4

أوجد قيمة كل من a , b اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

10 $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

$4b - 5 = 7$

$4b = 7 + 5$

$\frac{4b}{4} = \frac{12}{4}$

$b = 3$

$-a - 3 = -8$

$-a = -8 + 3$

$\frac{-a}{-1} = \frac{-5}{-1}$

$a = 5$

تـــأكـد :-

مثـال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

11 $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$

$-1+5i-2-3i$

$=-1-2+5i-3i$

$=-3+2i$

تــــأكـد :-

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

12

$(7+4i)-(1+2i)$

$7+4i-1-2i$

$=7-1+4i-2i$

$=6+2i$

تــــأكـد :-

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

13 $(6 - 8i)(9 + 2i)$

$=54+12i-72i+18$

$=54+18 + 12i-2i$

$=72 + 10i$

تـــأكـد :-

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

14 $(3+2i)(-2+4i)$

$$=-6+12i-4i-8$$

$$=-6-8+12i-4i$$

$$=-14+10i$$

تـــأكـد :-

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

15

$$\frac{3-i}{4+2i}$$

$$= \frac{3-i}{4+2i} \cdot \frac{4-2i}{4-2i}$$

$$= \frac{12-6i-4i-2}{16+4}$$

$$= \frac{10-10i}{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$



تـــأكـد :-

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

16

$$\frac{2+i}{5+6i}$$

$$= \frac{2+i}{5+6i} \cdot \frac{5-6i}{5-6i}$$

$$= \frac{10-12i+5i+6}{26+36}$$

$$= \frac{16-7i}{61} = \frac{16}{61} - \frac{7}{61} i$$



تـــأكـد :-

مثال 6

17) كهرباء: تبلغ شدة التيار في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي $5 - 3j$ أمبير، وفي الجزء الأخر من الدائرة $7 + 9j$ أمبير . أجمع هذين العددين لمركبين لإيجاد شدة التيار الكلية في الدائرة.

$$5 - 3i + 7 + 9i$$

$$= 5 + 7 - 3i + 9i$$

$$= 12 + 6i$$



تدرب وحل المسائل :–

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

18 $\sqrt{-121}$

$$\sqrt{-121} = \sqrt{121}\; i$$

$$= 11i$$

121	11
11	11
11	
1	

$11 \leftarrow \{11, 11\}$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

19

$$\sqrt{-169}$$

$$\sqrt{-169} = \sqrt{169}\ i$$

$$= 13i$$

169	13
13	13
13	
1	

13 ← 13, 13

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

20 $\sqrt{-100}$

$\sqrt{-100} = \sqrt{100}\ i$

$= 10i$

100	10	10
10	10	
10		
1		

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

21

$$\sqrt{-81}$$

$$\sqrt{-81} = \sqrt{81}\, i$$

$$= 9i$$

81	3	3
27	3	
9	3	3
3	3	
1		

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 5,7

بسـط كلا مما يأتي:

22 $(-3i)(-7i)(2i)$

$$=(-3i)(-7i)(2i)$$

$$=(21i^2)(2i)$$

$$=(-21)(2i)$$

$$=-42i$$

تدرب وحل المسائل :–

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

23 $4\,i\,(-6\,i)^2$

$=(4i)(-6i)^2$

$=(4i)(36i^2)$

$=(4i)(-36)$

$= -144i$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 5,7

بسـط كلا مما يأتي:

24 i^{11}

$=(i^4)^2 \cdot i^3$

$=(1)(-i)$

$= -i$

25 i^{25}

$=(i^6)^4 \cdot i$

$=(1) \cdot i$

$= i$



تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

26 $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$

$$3\sqrt{-10} \cdot 2\sqrt{-24}$$

$$\sqrt{10}\, i \cdot \sqrt{24}\, i$$

$$= i^2\sqrt{240}$$

$$= -1 \cdot 4\sqrt{3}$$

$$= -4\sqrt{3}$$

240	2	2
120	2	
60	2	2
30	2	
15	3	
5	5	
3		
1		



تدرب وحل المسائل :-

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

27

$$(4i)\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$$

$$=(4i)\left(\frac{1}{4}i^2\right)(-2i)^2$$

$$=(i)(-1)(4i^2)$$

$$=(-i)(-4)$$

$$=4i$$

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال 3

حل كل معادلة مما يأتي:

28 $4x^2 + 4 = 0$

$$\frac{4x^2}{4} = \frac{-4}{4}$$

بالقسمة على 4

$$x^2 = -1 \qquad x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x = \pm\sqrt{1}\; i$$

$$x = \pm i$$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثال 3

حل كل معادلة مما يأتي:

29 $3x^2 + 48 = 0$

$$\frac{3x^2}{3} = -\frac{48}{3}$$ بالقسمة على 3

$x^2 = -16$ $x = \pm\sqrt{-16}$

$x = \pm\sqrt{16}\, i$

$x = \pm 4i$

تـدرب وحل المسائل :–

مثـال 3

حل كل معادلة مما يأتي:

30 $2x^2 + 10 = 0$

بالقسمة على 2

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{-10}{2}$$

$$x^2 = -5 \qquad x = \pm\sqrt{-5}$$

$$x = \pm\sqrt{5}\ i$$

$$x = \pm i\sqrt{5}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

حل كل معادلة مما يأتي:

31 $6x^2 + 108 = 0$

بالقسمة على 6

$$\frac{6x^2}{6} = \frac{-108}{6}$$

$$x^2 = -16 \qquad x = \pm\sqrt{-16}$$

$$x = \pm\sqrt{16}\ i$$

$$x = \pm 4i$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 4

أوجد قيمتي y, x اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

32 $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$

$x+1 = 3$

$x = 3-1$

$x = 2$

$2y = -6$

$\frac{2y}{2} = \frac{-6}{2}$

$y = -3$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثال 4

أوجد قيمتي y, x اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

33 $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$

$$2x+7=-4$$
$$2x=-4-7$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{-11}{2}$$
$$x=5.5$$

$$3-y=6$$
$$-y=6-3$$
$$\frac{-y}{-1} = \frac{3}{-1}$$
$$y=-3$$

تـدرب وحل المسائل :–

مثـال 4

أوجد قيمتي y, x اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

34 $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$

$5 + y = 9$

$y = 9 - 5$

$y = 4$

$3x - 7 = -3$

$3x = -3 + 7$

$\frac{3x}{3} = \frac{4}{3}$

$x = \frac{4}{3}$

تـدرب وحل المسائل :-

مثال 4

أوجد قيمتي y, x اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

35 $(2x - 4y)\,i + x + 5y = 15 + 58\,i$

$\frac{10}{3}$

$2x - 4y = 58$

$x + 5y = 15$

$x = 15 - 5y$

بالتعويض عن x

$2(15 - 5y) - 4y = 58$

$30 - 10y - 4y = 58$

$30 - 14y = 58$

$-14y = 58 - 30$

$-14y = 28$

$\frac{-14y}{-14} = \frac{28}{-14}$

$y = -2$

بالتعويض عن y

$x = 15 + 10$

$x = 25$

تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 5,7

بسـط كلا مما يأتي:

36

$(-3 + i) + (-4 - i)$

$= -3 + i - 4 - i$

$= 3 - 4 + i - i$

$= -1$

تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 5,7

بسـط كلا مما يأتي:

37

$$(11 - 8i) - (2 - 8i)$$

$$= 11 - 8i - 2 + 8i$$

$$= 11 - 2 - 8i + 8i$$

$$= 9$$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

38

$(1 + 2i)(1 - 2i)$

$= 1 - 4i^2$

$= 1 + 4$

$= 5$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 5,7

بسـط كلا مما يأتي:

39 $(3 + 5i)(5 - 3i)$

$= 15 - 9i + 25i - 15i^2$

$= 15 + 15 - 9i + 25i$

$= 30 + 16i$



تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

40

$$(4 - i)(6 - 6i)$$

$$= 24 - 24i - 6i + 6i^2$$

$$= 24 - 6 - 24i - 6i$$

$$= 18 - 30i$$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 5,7

بسـط كلا مما يأتي:

41

$$\frac{2i}{1+i}$$

$$= \frac{2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$

$$= \frac{2i-2i^2}{1-i^2}$$

$$= \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

42

$$\frac{5}{2+4i}$$

$$= \frac{5}{2+4i} \cdot \frac{2-4i}{2-4i}$$

$$= \frac{10-20i}{4-16i^2}$$

$$= \frac{10-20i}{20} = \frac{1}{2} - i$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

43

$$\frac{5+i}{3i}$$

$$= \frac{5+i}{3i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$= \frac{5i+i^2}{3i^2}$$

$$= \frac{5i-1}{-3} = \frac{-5}{3}i + \frac{1}{3}$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

44

$$(4-6i)+(4+6i)$$

$$=4-6i+4+6i$$

$$=4+4$$

$$=8$$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 5,7

بسـط كلا مما يأتي:

45

$(8-5i)-(7+i)$

$=8-5i-7-i$

$=8-7-5i-i$

$=1-6i$



تدرب وحل المسائل :–

مثال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

46

$$(-6-i)(3-3i)$$

$$=-18+18i-3i-3i^2$$

$$=18+3+18i-3i$$

$$=21+15i$$

تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

47 $(1+i)(2+3i)(4-3i)$

$$(1+i)(2+3i)(4-3i) = 2+3i+2i-3\ (4-3i)$$

$$= (-1+5i)(4-3i)$$

$$= 11+23i$$



تـدرب وحل المسائل :-

مثـال 5,7

بسط كلا مما يأتي:

48

$$\frac{4-i\sqrt{2}}{4+i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4-i\sqrt{\ }}{4+I\sqrt{2}} \cdot \frac{4-I\sqrt{2}}{4-I\sqrt{2}}$$

$$= \frac{16-4i\sqrt{2}-4i\sqrt{2}+2i^2}{16-2i^2}$$

$$= \frac{14-8i\sqrt{2}}{18} = \frac{7}{9} - \frac{4}{9}i\sqrt{2}$$

تـدرب وحل المسائل :-

مثـال 5,7

بسـط كلا مما يأتي:

49

$$\frac{2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}} \cdot \frac{2-i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4-2i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}+3i^2}{4-3i^2}$$

$$= \frac{1-4i\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}i\sqrt{3}$$

تـدرب وحـل المسائل :-

50 كهرباء: تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $7+8j$ أوم ، وفي الجزء الآخر منها $13 - 4j$ أوم . اجمع هاذين العددين المركبين لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية.

$$(7 + 8j) + (13 - 4j) = 20 + 4j$$ أوم



تـدرب وحـل المسائل :-

كهرباء: استعمل الصيغة $V = R \cdot i$ ، حيث V فرق الجهد، i شدة التيار ، R المعاوقة في حل السؤالين 53 , 52:

51 إذا كانت شدة التيار في دائرة كهربائية $3 + 6j$ أمبير ،و المعاوقة $5 - j$ أوم فكم يكون فرق لجهد ؟

فرق الجهد = شدة التيار × المقاومة

$$V = R \, . \, i$$

$$= (3 + 6j)(5 - j)$$

$$= 21 + 27j$$ فولت



تدرب وحل المسائل :-

كهرباء: استعمل الصيغة $V = R \cdot i$ ، حيث V فرق الجهد، i شدة التيار ، R المعاوقة في حل السؤالين 53 , 52:

52 إذا كان فرق الجهد في دائرة كهربائية $20 - 12j$ فولت، و المعاوقة $6 - 4j$ أوم فكم تكون شدة التيار ؟

$$\text{شدة التيار} = \frac{\text{فرق الجهد}}{\text{المعاوقة}}$$

$$= \frac{20-12j}{6-4j}$$

$$= \frac{42}{13} + \frac{2}{13}j$$

تدرب وحل المسائل :-

53 أوجد ناتج جمع

$ix^2 - (4+5i)x + 7$ إلى $3x^2 + (2+6i)x - 8i$.

$ix^2 - (4+5i)x + 7$ إلى $3x^2 + (2+6i)x - 8i$

$(3+i)x^2 + (-2+i)x - 8i + 7$

$-4 - 5i$

تدرب وحل المسائل :–

54

بسط العبارة :

$$[(2+i)x^2 - ix + 5 + i] - [(-3+4i)x^2 + (5-5i)x - 6]$$

$ix^2 - (4+5i)x + 7$ إلى $3x^2 + (2+6i)x - 8i$.

$$(2+i)x^2 - xi + 5 + i - (-3+4i)x^2 - (5-5i)x + 6$$

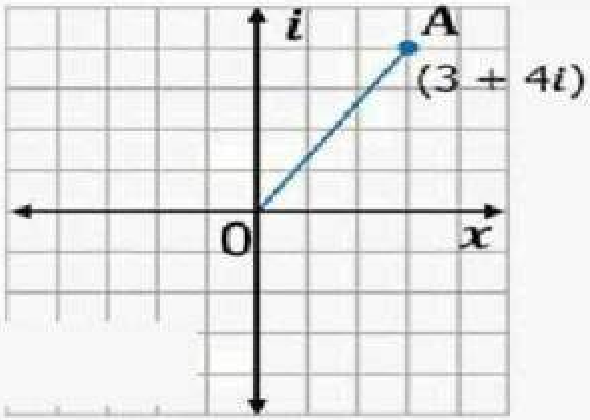
$$= (2+i)x^2 - xi + 5 + i + (3-4i)x^2 + (-5+5i)x + 6$$

$$= (5-3i)x^2 + (-5+4i)x + i + 11$$

تـدرب وحـل المسائل :-

55 تمثيلات متعددة : ستكتشف في هذه المسألة جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمستوى المركب يشبه إلى حد بعيد المستوى الحقيقي،وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي والأعداد التخيلية على المحور الرأسي.

a) **بيانياً:** مثل العدد $3 + 4i$ بيانياً في المستوى المركب وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة (3 ,4) وسم تلك النقطة **A**.

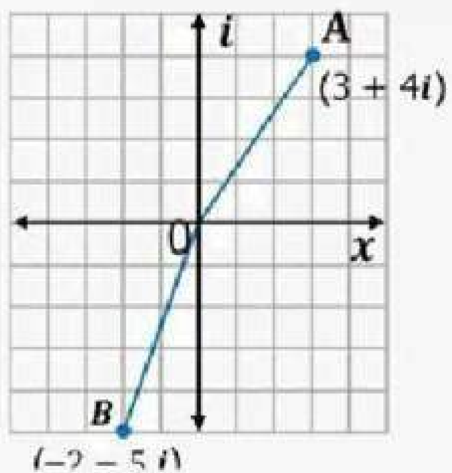




تـدرب وحـل المسائل :–

55 تمثيلات متعددة : ستكتشف في هذه المسألة جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمستوى المركب يشبه إلى حد بعيد المستوى الحقيقي،وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي والأعداد التخيلية على المحور الرأسي.

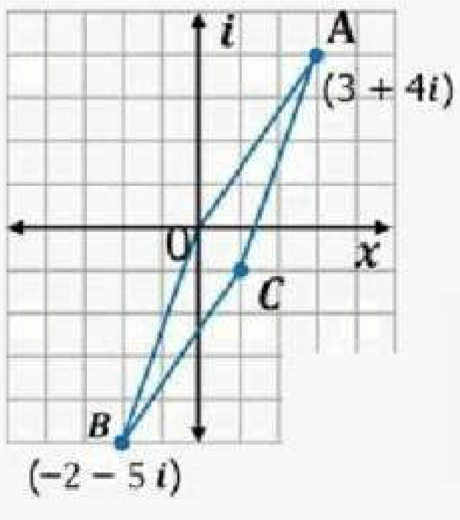
b) **بيانياً:** مثل العدد $-2-5\,i$ بيانياً في المستوى المركب وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(-2\,,-5)$ وسمها B.



تـدرب وحـل المسائل :-

55 تمثيلات متعددة : ستكتشف في هذه المسألة جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمستوى المركب يشبه إلى حد بعيد المستوى الحقيقي،وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي والأعداد التخيلية على المحور الرأسي.

c) **بيانياً:** إذا كانت النقطتان $A.B$ ونقطة الأصل ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع فأكمل رسمه بإضافة النقطة الرابعة C.

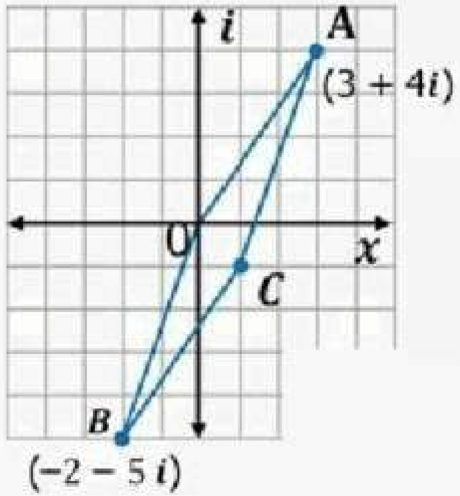


$$(3 + 4i) + (-2 - 5i) = (1 - i)$$

تـدرب وحـل المسـائل :-

55 تمثيلات متعددة : ستكتشف في هذه المسألة جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمستوى المركب يشبه إلى حد بعيد المستوى الحقيقي،وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي والأعداد التخيلية على المحور الرأسي.

d) **تحليلياً:** ما العدد المركب الذي تمثله النقطة C ؟ وما العلاقة بين النقاط A , B , C .



$1 - i$ ؛ النقطة C تمثل ناتج جمع العددين المركبين الممثلين بالنقطتين B , A

الفهرس

الفصل الثالث

٣-٢ القانون العام والمميز

The Quadratic Formula and the Discriminant

فيما سبق:

درستُ حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لأحدد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

المفردات

القانون العام
Quadratic Formula

المميز
discriminant



لماذا؟

أُطلق سهم نحو هدف على الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$$h = -4.9t^2 + 117t + 42$$

حيث h ارتفاع السهم بعد t ثانية من إطلاقه، وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى الهدف، نحل المعادلة:

$$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0.$$

ومن الصعب حل هذه المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل، أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

٣-٢ القانون العام والمميز

The Quadratic Formula and the Discriminant

تعرف المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام** لحل المعادلات التربيعية.

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$

٣-٢ القانون العام والمميز

The Quadratic Formula and the Discriminant

مثال 1 معادلة لها جذران نسبيان

حل المعادلة: $x^2 - 10x = 11$ باستعمال القانون العام.

أولًا اكتب المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، وحدّد قيم كلٍّ من a،b،c .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - 10x = 11 \quad \rightarrow \quad 1x^2 - 10x - 11 = 0$$

ثم عوض بعد ذلك بتلك القيم في القانون العام.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	القانون العام
$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$	عوّض عن: a بالعدد 1، b بالعدد -10 ، c بالعدد -11
$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$	اضرب
$= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$	بسّط
$= \frac{10 \pm 12}{2}$	$\sqrt{144} = 12$
$x = \frac{10 - 12}{2}$ أو $x = \frac{10 + 12}{2}$	اكتب على صورة معادلتين
$= -1$ ، $= 11$	بسّط

وعليه يكون الحلان هما: 11، -1 .

الفصل الثالث
٣-٢ القانون العام والمميز

تحقق من فهمك :-

1A) حل المعادلة $x^2 + 6x = 16$ باستعمال القانون العام.

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$a = 1 \quad , \quad b = 6 \quad , \quad c = -16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$$

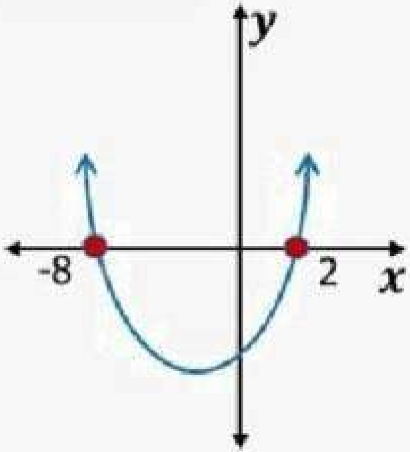
$$= \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$$x = \frac{-6 + 10}{2} \qquad x = \frac{-6 - 10}{2}$$

$$x = 2 \qquad x = -8$$



The Quadratic Formula and the Discriminant

تحقق من فهمك :-

(1B حل المعادلة $2x^2 + 25x + 33 = 0$ باستعمال القانون العام.

$a = 2$, $b = 25$, $c = 33$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4(2)(33)}}{2(2)}$$

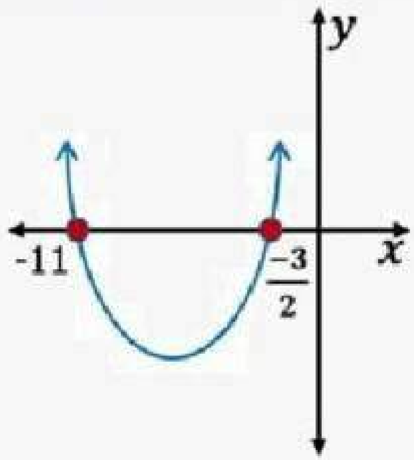
$$= \frac{-25 \pm \sqrt{625 - 264}}{4}$$

$$= \frac{-25 \pm \sqrt{361}}{4}$$

$$= \frac{-25 \pm 19}{4}$$

$$x = \frac{-25 + 19}{4} \qquad x = \frac{-25 - 19}{4}$$

$$x = \frac{-3}{2} \qquad x = -11$$



مثال 2 معادلة لها جذر نسبي واحد (مكرر مرتين)

حل المعادلة: $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .

حدد قيم كلٍّ من a،b،c، وعوّض هذه القيم في القانون العام .

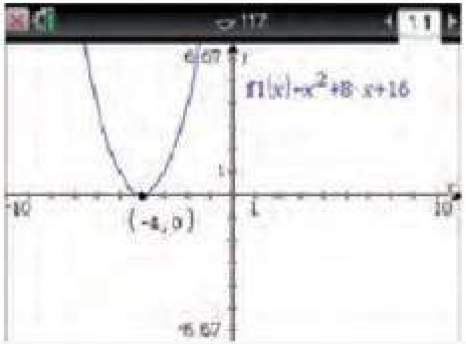
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$ عوّض عن: a بالعدد 1، وعن b بالعدد 8 ، وعن c بالعدد 16

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$ بسّط

$$= \frac{-8}{2} = -4$$ $\sqrt{0} = 0$

الحل هو -4 (مكرر مرتين) .



تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = x^2 + 8x + 16$ بيانيًا. مستعملًا خاصية الصفر في الحاسبة البيانية للحصول على قيمة صفر الدالة المرتبطة وهو: $x = -4$

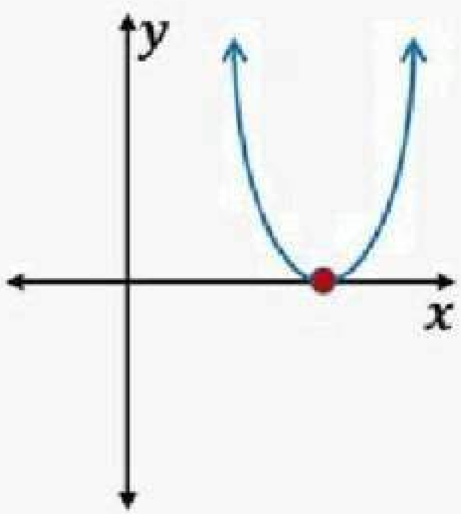
براهام جوبتا

(598-668 م) عالم رياضي هندي، وهو أول من أوجد حلًا عامًا للمعادلة التربيعية في الصورة $ax^2 + bx = c$، وهو ما يُسمّى الآن القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

تحقق من فهمك :-

2A) حل المعادلة $x^2 - 16x + 64 = 0$ باستعمال القانون العام.

$a = 1 \quad , \quad b = -16 \quad , \quad c = 64$



X = 8

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(1)(64)}}{2(1)}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{2}$$

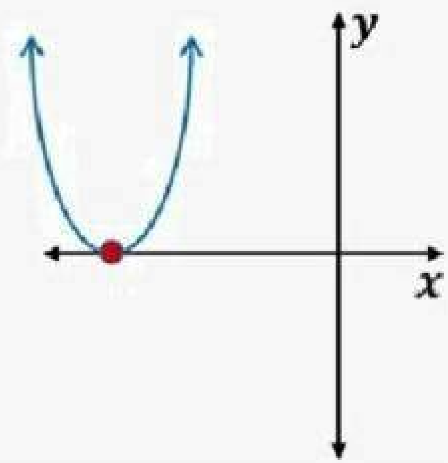
$$= \frac{16 \pm \sqrt{0}}{2}$$

تحقق من فهمك :-

(2B حل المعادلة $x^2 + 34x + 289 = 0$ باستعمال القانون العام.

$a = 1$, $b = 34$, $c = 289$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$= \frac{-34 \pm \sqrt{(34)^2 - 4(1)(289)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-34 \pm \sqrt{1156 - 1156}}{2}$$

$$= \frac{-34 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$= -17$$

٣-٢ القانــون العام والمميز

The Quadratic Formula and the Discriminant

مثال 2 معادلة لها جذر نسبي واحد (مكرر مرتين)

حل المعادلة: $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .

حدد قيم كلٍّ من a،b،c، وعوّض هذه القيم في القانون العام .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

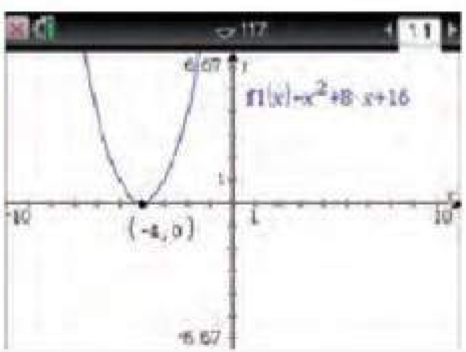
$$= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$ عوّض عن: **a** بالعدد **1**، وعن **b** بالعدد **8** ، وعن **c** بالعدد **16**

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$ بسّط

$$= \frac{-8}{2} = -4$$ $\sqrt{0} = 0$

الحل هو -4 (مكرر مرتين) .

تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = x^2 + 8x + 16$ بيانيًّا. مستعملًا خاصية الصفر في الحاسبة البيانية للحصول على قيمة صفر الدالة المرتبطة وهو: $x = -4$



براهام جوبتا

(598-668 م) عالم رياضي هندي، وهو أول من أوجد حلًا عامًا للمعادلة التربيعية في الصورة $ax^2 + bx = c$، وهو ما يُسمّى الآن القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

٣-٢ القانــون العام والمميز

The Quadratic Formula and the Discriminant

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بكتابتها في الصورة الجذرية .

مثال 3 الجذور غير النسبية

حل المعادلة: $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستعمال القانون العام.

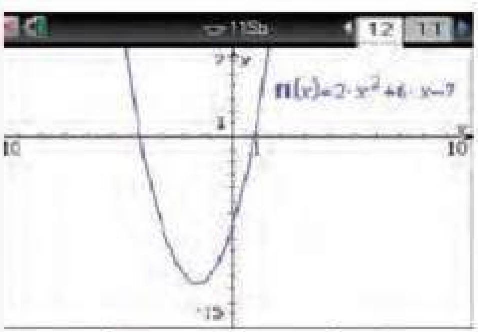
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$$ عوّض عن: a بالعدد 2، وعن b بالعدد 6 ، وعن c بالعدد 7−

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$$ بسّط

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$$ $\sqrt{92} = \sqrt{4(23)} = 2\sqrt{23}$

الحلَّان التقريبيَّان هما: 0.9 ، 3.9−



تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = 2x^2 + 6x - 7$ بيانيًا. مستعملًا خاصية الصفر في الحاسبة البيانية للحصول على القيمتين التقريبيتين لصفرَي الدالة المرتبطة وهما: 0.9 ، 3.9−

إرشادات للدراسة

إظهار كامل التمثيل البياني:
لإظهار التمثيل البياني للدالة كاملًا على الشاشة.
اضغط مفتاح (menu) ومنها اختر [تكبير/تصغير النافذة] ثم اختر [1: إعدادات النافذة] لتحدد التدريج المناسب للمتغير y فاختر مثلًا [القيمة الصغرى Y: −15] و [القيمة العظمى Y: 7]

تحقق من فهمك :ـ

3A) حل المعادلة $3x^2 + 5x + 1 = 0$ باستعمال القانون العام.

$a = 3$, $b = 5$, $c = 1$

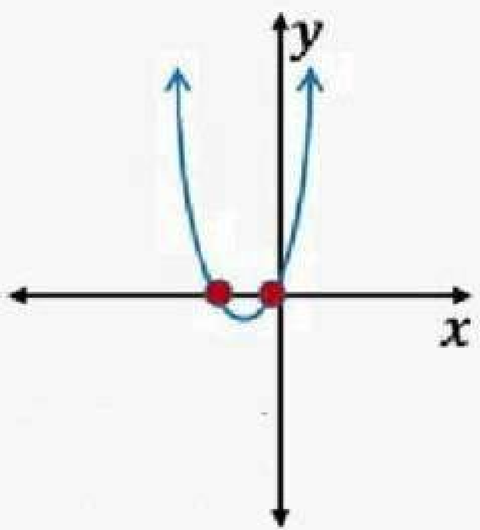
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \quad x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}$$

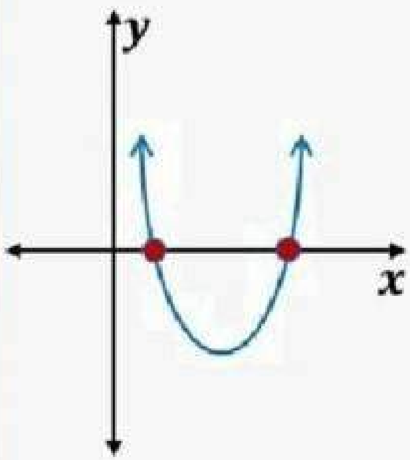




تحقق من فهمك :ـ

3B) حل المعادلة $x^2 - 8x + 9 = 0$ باستعمال القانون العام.

$a = 1$, $b = -8$, $c = 9$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{2} \qquad x = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2}$$

$$x = 4 + \sqrt{7} \qquad x = 4 - \sqrt{7}$$

٣-٢ القانون العام والمميز

The Quadratic Formula and the Discriminant

إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

مثال 4 الجذور المركبة

حل المعادلة: $x^2 - 6x = -10$ باستعمال القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

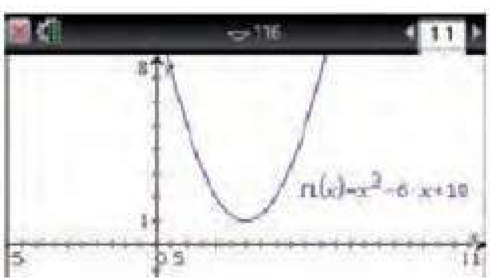
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$ عوّض عن: a بالعدد 1 ، b بالعدد -6 ، c بالعدد 10

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$ بسّط

$$= \frac{6 \pm 2i}{2}$$ $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2i$

$$= 3 \pm i$$ بسّط

الحلان هما: $3 + i$ ، $3 - i$ عددان مركبان مترافقان.



تحقق: يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة أن الحلّين هما عددان مركبان، ولكن لا يساعدك التمثيل البياني على إيجادهما. وللتحقق من صحة الحلين المركبين، عوضهما في المعادلة الأصلية.

إرشادات للدراسة

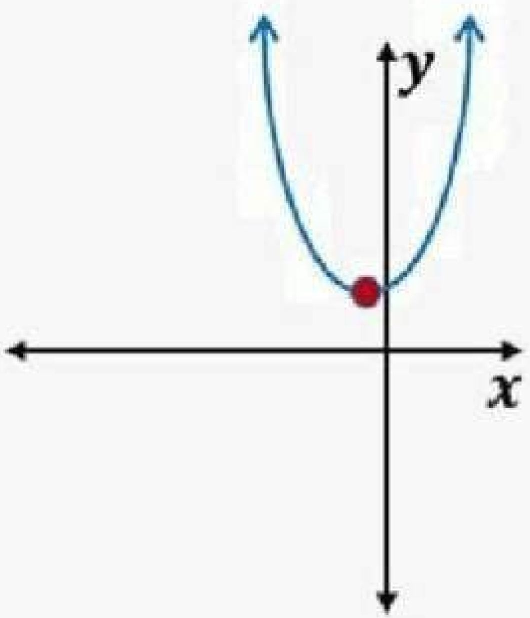
الأعداد المركبة

تذكّر أن تكتب حلك على الصورة $a + bi$ ، وتسمى هذه الصورة الصورة القياسية للعدد المركب.

تحقق من فهمك :-

4A) حل المعادلة $3x^2 + 5x + 4 = 0$ باستعمال القانون العام.

$a = 3 \quad , \quad b = 5 \quad , \quad c = 4$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm i\sqrt{23}}{6}$$

تحقق من فهمك :–

4B) حل المعادلة $x^2 - 4x = -13$ باستعمال القانون العام.

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$a = 1 \quad , \quad b = -4 \quad , \quad c = 13$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

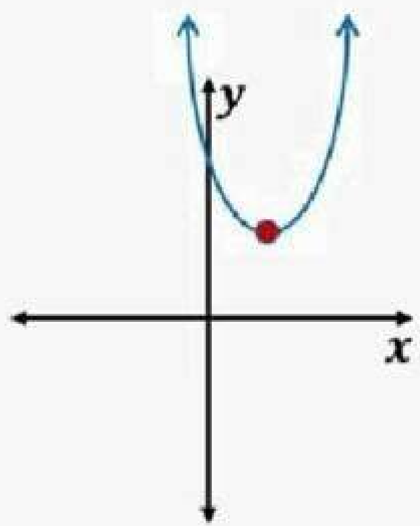
$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm i\,6}{2}$$

$$= 2 \pm 3i$$





الفصل الثالث

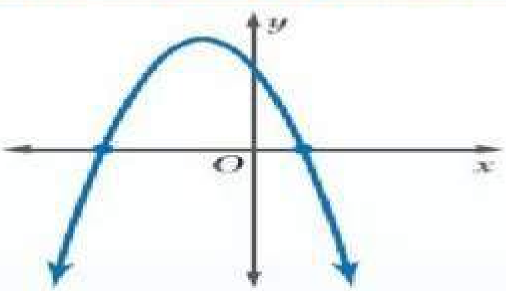
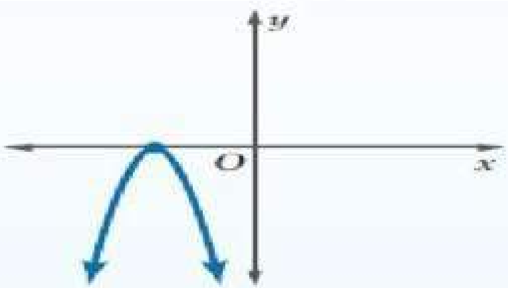
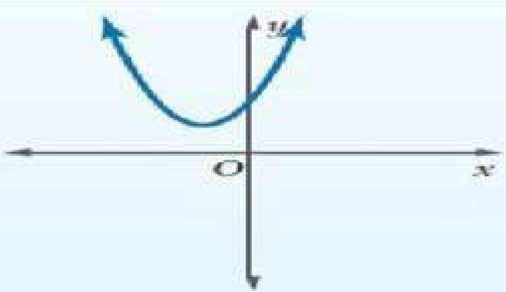
٣-٢ القانون العام والمميز

The Quadratic Formula and the Discriminant

مفهوم أساسي — المميز

اضف إلى مطويتك

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a, b, c أعداد نسبية، $a \neq 0$.

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل .	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$. والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي مكرر مرتين	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

The Quadratic Formula and the Discriminant

مثال 5 وصف الجذور

أوجد قيمة المميز لكلٍّ من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، وحدد عدد جذور كلٍّ منهما وأنواعها:

$7x^2 - 11x + 5 = 0$ (a

$a = 7$، $b = -11$، $c = 5$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

المميز سالب؛ لذا يوجد جذران مركبان.

$x^2 + 22x + 121 = 0$ (b

$a = 1$، $b = 22$، $c = 121$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

المميز يساوي صفرًا؛ لذا يوجد جذر حقيقي واحد مكرر مرتين.

إرشادات للدراسة

الجذور
تذكَّر أن حلول المعادلة تسمى جذورًا وهي قيم X التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X.

تحقق من فهمك :ــ

5) أوجد قيمة المميز لكل من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين، وحدد عدد جذور كل منهما وأنواعها:

(5A $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

$a = -5 \;,\; b = 8 \;,\; c = -1$

$D = b^2 - 4ac$

$= (8)^2 - 4(-5)(-1)$

$= 64 - 20$

$= 44$

المميز موجب، لذا يوجد جذران حقيقيان غير نسبيين.

تحقق من فهمك :ـ

(5B

$$-7x + 15x^2 - 4 = 0$$

$$15x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$a = 15 \;,\; b = -7 \;,\; c = -4$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-7)^2 - 4(15)(-4)$$

$$= 49 + 240$$

$$= 289$$

المميز موجب، لذا يوجد جذران حقيقيان نسبيان.



الفصل الثالث

٣-٢ القانون العام والمميز

The Quadratic Formula and the Discriminant

ملخص المفهوم — حل المعادلات التربيعية

أضف إلى مطويتك

الطريقة	إمكانية استعمالها	حالات استعمالها
التمثيل البياني	أحيانًا	عندما لا يطلب إيجاد الحل الدقيق، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	عندما يساوي الحد الثابت صفرًا مثال: $x^2 - 7x = 0$؛ أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل. مثال: $x^2 - 5x + 6 = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحيانًا	مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتًا. مثال: $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	مع المعادلات المكتوبة على الصورة: $x^2 + bx + c = 0$. مثال: $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	عندما لا يمكن استعمال بقية الطرائق أو عندما يكون من الصعب استعمالها. مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تــــأكـد :-

مثال 4-1

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

1 $x^2 + 12x - 9 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = 12 \quad , \quad c = -9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 36}}{2}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{180}}{2}$$

تــــأكـد :-

مثال 4-1

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

2 $x^2 + 8x + 5 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = 8 \quad , \quad c = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 20}}{2}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$x = \frac{-8 + 2\sqrt{11}}{2} \qquad x = \frac{-8 - 2\sqrt{11}}{2}$$

$$x = -4 + \sqrt{11} \qquad x = -4 - \sqrt{11}$$



تـــأكـد :-

مثـال 4-1

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

3 $4x^2 - 5x - 2 = 0$

$a = 4 \quad , \quad b = -5 \quad , \quad c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(-2)}}{2(4)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25+32}}{8}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{57}}{8}$$

$$x = \frac{5+\sqrt{57}}{8} \qquad x = \frac{5-\sqrt{57}}{8}$$

تـــأكـد :-

مثال 4-1

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

4 $9x^2 + 6x - 4 = 0$

$a = 9 \quad , \quad b = 6 \quad , \quad c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(9)(-4)}}{2(9)}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 144}}{18}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{180}}{18}$$

$$x = \frac{-6 + 6\sqrt{5}}{18} \qquad x = \frac{-6 - 6\sqrt{5}}{18}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{3} \qquad x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{3}$$

تــــأكـد :-

مثال 4 -1

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

5 $10x^2 - 3 = 13x$

$$10x^2 - 13x - 3 = 0$$

$$a = 10 \quad , \quad b = -13 \quad , \quad c = -3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(10)(-3)}}{2(10)}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{169+120}}{20}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{289}}{20}$$

$$x = \frac{13+17}{20}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{13-17}{20}$$

$$x = \frac{-1}{5}$$

تـــأكـد :-

مثال 4-1

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

6

$$22x = 12x^2 + 6$$

$$-12x^2 + 22x - 6 = 0$$

$a = -12$, $b = 22$, $c = -6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-22 \pm \sqrt{(22)^2 - 4(-12)(-6)}}{2(-12)}$$

$$= \frac{-22 \pm \sqrt{484 - 288}}{-24}$$

$$= \frac{-22 \pm \sqrt{196}}{-24}$$

$$x = \frac{-22 + 14}{-24} \qquad x = \frac{-22 - 14}{-24}$$

$$x = \frac{1}{3} \qquad x = \frac{3}{2}$$

تـــــأكـد :-

مثال 4-1

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

7

$$-3x^2 + 4x = -8$$

$$-3x^2 + 4x + 8 = 0$$

$a = -3 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad c = 8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(-3)(8)}}{2(-3)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 96}}{-6}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{112}}{-6}$$

$$x = \frac{-4 + 4\sqrt{7}}{-6} \qquad x = \frac{-4 - 4\sqrt{7}}{-6}$$

$$x = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3} \qquad x = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}$$



تـــأكـد :-

مثال 4-1

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

8 $x^2 + 3 = -6x + 8$

$$x^2 + 6x - 5 = 0$$

$a = 1 \quad , \quad b = 6 \quad , \quad c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 20}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{14}}{2}$$

$$x = -3 + \sqrt{14}$$

$$x = \frac{-6 - 2\sqrt{14}}{2}$$

$$x = -3 - \sqrt{14}$$

تــــأكــد :–

مثال 5

أجب عن الفرعين a ، b لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز .

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها.

9 $3x^2 + 8x + 2 = 0$

a) $a = 3 \quad , \quad b = 8 \quad , \quad c = 2$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (8)^2 - 4(3)(2) \\ &= 64 - 24 \\ &= 40 \end{aligned}$$

b) المميز موجب، وليس مربعاً كاملاً؛ لذا الجذران غير نسبيين.

تـــأكـد :-

مثال 5

أجب عن الفرعين a ، b لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز .

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها.

10 $2x^2 - 6x + 9 = 0$

(a $a = 2$, $b = -6$, $c = 9$

$$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(2)(9)$$
$$= 36 - 72$$
$$= -36$$

b) المميز سالب؛ لذا الجذران مركبان.



تـــأكـد :-

مثال 5

أجب عن الفرعين a ، b لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز .

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنواعها.

11 $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

a) $a = -16 \quad , \quad b = 8 \quad , \quad c = -1$

$$b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(-16)(-1)$$
$$= 64 - 64$$
$$= 0$$

b) المميز يساوي صفراً؛ لذا يوجد جذر حقيقي واحد.

تـــأكـد :-

مثال 5

أجب عن الفرعين a ، b لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز .

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها.

12

$$5x^2 + 2x + 4 = 0$$

a) $a = 5$, $b = 2$, $c = 4$

$$b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(5)(4)$$
$$= 4 - 80$$
$$= -76$$

b) المميز سالب؛ لذا الجذران مركبان.

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال 1-4

13 $x^2 + 45x = -200$

$$x^2 + 45x + 200 = 0$$

$$a = 1 \quad , \quad b = 45 \quad , \quad c = 200$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-45 \pm \sqrt{(45)^2 - 4(1)(200)}}{2(1)}$$

$x = -5$ $\qquad$ $x = -40$

تدرب وحل المسائل :–

مثال 1-4

14

$$4x^2 - 6 = -12x$$

$$4x^2 + 12x - 6 = 0$$

$$a = 4 \quad , \quad b = 12 \quad , \quad c = -6$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(4)(-6)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{15}}{2} \qquad x = \frac{-3 - \sqrt{15}}{2}$$



تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال 1-4

15 $5x^2 - 9 = 11x$

$$5x^2 - 11x - 9 = 0$$

$$a = 5 \quad , \quad b = -11 \quad , \quad c = -9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(5)(-9)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{11 + \sqrt{301}}{10} \qquad x = \frac{11 - \sqrt{301}}{10}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1-4

16 $12x^2 + 9x - 2 = -17$

$$12x^2 + 9x + 15 = 0$$

$$a = 12 \ , \ b = 9 \ , \ c = 15$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4(12)(15)}}{2(12)}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 720}}{24}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{-639}}{24}$$

$$= \frac{-9 \pm i\sqrt{639}}{24}$$

$$= \frac{-9 \pm i\,3\sqrt{71}}{24}$$

$$= \frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8}$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

17 $2x^2 + 3x - 3 = 0$

$(a$ $\quad a = 2 \;,\; b = 3 \;,\; c = -3$

$$b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-3)$$
$$= 9 + 24$$
$$= 33$$

b) المميز موجب، وليس مربعاً كاملاً؛ لذا الجذران غير نسبيين.

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

17 $2x^2 + 3x - 3 = 0$

(c

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-3+\sqrt{33}}{4} \qquad x = \frac{-3-\sqrt{33}}{4}$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

18 $3x^2 - 3x + 8 = 0$

$a=3 \quad b=-3 \quad c=8$

a) $(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = -87$

b) جذران مركبان مختلفان

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3}$$

c) $$x = \frac{3 \pm \sqrt{87}}{6}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

19 $2x^2 + 4x + 7 = 0$

$7a=2 \quad b=4 \quad c=8$

a) $(4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -40$

b) جذران مركبان مختلفان

c) $X = \dfrac{-4 \pm i\sqrt{40}}{4}$

c) $X = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{10}}{2}$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

20 $-5x^2 + 4x + 1 = 0$

$a=-5 \quad b=4 \quad c=1$

a) $(4)^2 - 4 \cdot -5 \cdot 1 = 36$

b) جذران نسبيين مختلفان

c) $X = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot -5}$

c) $X = \dfrac{-4 \pm 6}{-10}$

$x = \dfrac{-1}{5} \quad x = 2$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 5

أجب عن الفروع $a-c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

21 $x^2 - 6x = -9$

$X^2 - 6x + 9 = 0$

$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 9$

a) $(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$

b) جذر واحد نسبي

c) $X = \dfrac{6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$

$x = 3$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

22 $x^2 + 2x - 4 = -9$ $x^2 + 2x + 5 = 0$

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 5$

a) $(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$

b) جذرين مركبين مختلفين

c) $x = \dfrac{6 \pm i\sqrt{16}}{2 \cdot 1}$

$x = 3 + 2i$

$x = 3 - 2i$

تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 5

أجب عن الفروع $a-c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

23 $-6x^2+5=-4x+8$

$-6x^2+4x-3=0$

$a=-6 \quad b=4 \quad c=-3$

a) $(4)^2-4\cdot-6\cdot-3=-56$

b) جذرين مركبين مختلفين

c) $x=\dfrac{-4 \pm i\sqrt{56}}{2\cdot-6}$

$x=\dfrac{2\pm i\sqrt{14}}{6}$

تدرب وحل المسائل :–

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

24 $5x^2 + 8x = 0$

$5x^2 + 8x + 0 = 0$

$a = 5 \quad b = 8 \quad c = 0$

a) $(8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0 = 64$

b) جذرين نسبيين مختلفين

$x = \dfrac{-8 \pm 8}{10}$

c) $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 5}$

$x = 0 \quad x = \dfrac{-8}{5}$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

25 $8x^2 = -2x + 1$

$8x^2 + 2x - 1 = 0$

$a = 8 \quad b = 2 \quad c = -1$

a) $(2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot -1 = 36$

b) جذرين غير نسبيين

c) $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 8}$

$x = \dfrac{-2 \pm 6}{16}$

$x = \dfrac{1}{4} \quad x = \dfrac{-1}{2}$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

26 $4x - 3 = -12x^2$ $12x^2 + 4x - 3 = 0$

$a = 12 \quad b = 4 \quad c = -3$

a) $(6)^2 - 4 \cdot 12 \cdot -3 = 160$

b) جذرين حقيقيين مختلفين

c) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{160}}{2 \cdot 12}$

$x = \dfrac{-4 \pm 4\sqrt{10}}{24}$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{10}}{6}$



تدرب وحل المسائل :-

27

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

$$0.8x^2 + 2.6x = -3.2$$

(a $a = 0.8$, $b = 2.6$, $c = 3.2$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (2.6)^2 - 4(0.8)(3.2) \\ &= 6.76 - 10.24 \\ &= -3048 \end{aligned}$$

(b المميز سالب، لذا الجذران مركبان

(c

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2.6 \pm \sqrt{(2.6)^2 - 4(0.8)(3.2)}}{2(0.8)}$$

$$x = \frac{-13 + i\sqrt{87}}{8} \quad x = \frac{-13 - i\sqrt{87}}{8}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

أجب عن الفروع $a - c$ لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور ، وحدد أنوعها .

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

28 $0.6x^2+1.4x=4.8$

$0.6X^2+1.4x-4.8=0$

$a= 0.6 \quad b= 1.4 \quad c= -4.8$

a) $(1.4)^2-4\cdot 0.6\cdot -4.8= 13.48$

b) جذرين غير نسبيين مختلفين

$$X= \frac{-1.4\pm 3.7}{1.2}$$

$$c)\, X= \frac{-1.4 \pm \sqrt{13.84}}{2\cdot 0.6}$$

$X=4.25$

$X=1.9$



29 التدخين: تبذل دول العالم جهوداً مكثفة للتوعية بأخطار التدخين، أثمرت عن تناقص أعداد المدخنين. وفي إحدى البلدان أجريت دراسة حول الإصابات بمرض سرطان الرئة بين كل 100000 شخص في بعض الأعوام ، كانت نتائجها كما في الجدول أدناه. ويمكن تمثيل عدد المصابين بالمعادلة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$ ، حيث x عدد السنوات بعد عام 2000 .

العام	عدد الإصابات لكل 10000
2000	91.9
2002	89.4
2004	85.3
2010	؟
2015	؟

a) أحسب عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عامي 2015 , 2010.

عام 2010: $x = 10$

$$y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$$

$$y = -0.26(10)^2 - 0.55(10) + 91.81$$

$$y = 60.31$$

عام 2015: $x = 15$

$$y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$$

$$y = -0.26(15)^2 - 0.55(15) + 91.81$$

$$y = 25.06$$

b) استعمل القانون العام لإيجاد قيمة x عندما $y = 50$.

$$y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$$

$$50 = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$$

$$-0.26x^2 - 0.55x + 41.81 = 0$$

$$a = -0.26 \quad , \quad b = -0.55 \; , \; c = 41.81$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{0.55 \pm \sqrt{(-0.55)^2 - 4(-0.26)(41.81)}}{2(-0.26)}$$

$$= \frac{0.55 \pm \sqrt{0.3025 + 43.4824}}{-0.52}$$

$$= \frac{0.55 \pm \sqrt{43.7849}}{-0.52}$$

$x = -13.8$ مرفوض $\quad x = 11.7$

c) اعتماداً على الدالة التربيعية، متى يصبح معدل الإصابة يساوي صفراً ؟ وهل هذا التوقع معقول ؟ فسر إجابتك.

$$y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$$
$$0 = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$$
$$-0.26x^2 - 0.55x + 91.81 = 0$$

$a = -0.26 \quad , \quad b = -0.55 \; , \; c = 91.81$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{0.55 \pm \sqrt{(-0.55)^2 - 4(-0.26)(91.81)}}{2(-0.26)}$$

$$= \frac{0.55 \pm \sqrt{0.3025 + 95.4824}}{-0.52}$$

$$= \frac{0.55 \pm \sqrt{95.7849}}{-0.52}$$

$x = -19.9$ مرفوض $\quad x = 17.8$

2017، إجابة ممكنة: لا ؛ لأن معدل الإصابة بسرطان الرئة لن يصبح صفراً إلا إذا وجد علاج ناجح لهذا المرض ، وهذا لا يمكن التنبؤ به.

30 نظرية الأعداد: يعطى مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية n، ..... ، 3 ، 2 ، 1 بالقانون $s = \frac{1}{2}n(n+1)$ فكم عدداً صحيحاً متتالياً بدءاً بالعدد 1 مجموعها يساوي 666 ؟

$$\frac{1}{2}n(n+1) = 666$$

$$n(n+1) = 1332$$

$$n^2 + n - 1332 = 0$$

$$a = 1 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = -1332$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2-4(1)(-1332)}}{2(1)}$$

$n = 36$ $\qquad$ $n = -37$ (مرفوض)

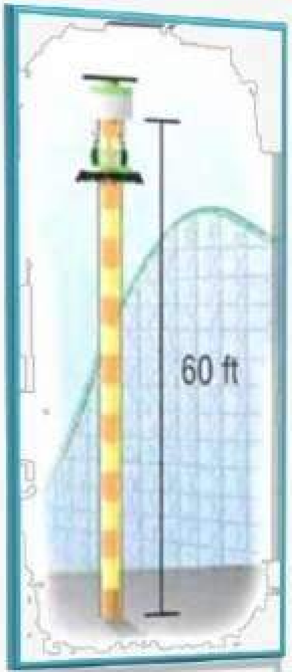
الفهرس

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال 5

31

ترفيه: تمثل حركة لعبة ترفيهية بالدالة: $h = -16t^2 - 64t + 60$ حيث h الارتفاع بالأقدام و t الزمن بالثواني. فإذا علمت أنها ترتفع إلى قمة البرج ثم تهوي بسرعة تصل إلى $80\ ft/s$ ، فما الزمن الذي يستغرقه هبوطها من ارتفاع $60\ ft$ إلى $0\ ft$ ؟



$$-16t^2 - 64t + 60 = 0$$

$$t = \frac{-4 + \sqrt{31}}{2}$$

= 0.78 ثانية تقريباً

$$t = \frac{-4 - \sqrt{31}}{2}$$

= -4.783 (مرفوض)